Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год

5 класс

1. Найти такие четыре натуральных числа, что произведение любых трех из них, сложенное с единицей, делится на четвертое.
2. Отец старше сына в 4 раза, а сумма их возрастов составляет 50 лет. Через сколько лет отец станет втрое старше сына?
3. Как с помощью двух бидонов емкостью 17 и 5 литров отлить из молочной цистерны 13 литров молока?
4. В неравенствах $П > Р > О < Е < К < Т < И < Р > О > В > А > Н < И >$ Е разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым – одинаковые. Какая цифра 1, 2, 3, 7 или иная соответствует букве $В$?

5. Петя перемножил числа от одного до пятидесяти. Сколькими нулями оканчивается полученное произведение?

Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год

Решение

5 класс

1. Например, 1, 2, 3, 7.
2. Сейчас сыну 10 лет, а отцу 40. Разность их возрастов 30 лет станет удвоенным новым возрастом сына, так что сыну станет 15 лет, и произойдет это через 5 лет.
3. Наполнить 17-литровый бидон с помощью 5-литрового, тогда в нем останется 3 литра; вылить из большого бидона молоко в цистерну и налить в него 3 литра и два раза по 5 литров малым ведром.
4. Букве B соответствует число 2.
5. В конце произведения 12 нулей.

Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год
6 класс

1. Сколько имеется четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них 97?
2. Двенадцативедерная бочка наполнена керосином. Как разлить его на две равные части, пользуясь пустыми пятиведерной и восьмиведерной бочками?
3. В магазин обуви пришли 4 сороконожки в одинаковых башмачках (у каждой из них по 20 пар ног). У одной из сороконожек не хватало обуви на задней половине ног, у другой – на передней половине, у третьей были обуты только правые ножки, а у четвертой – только левые. Они купили в магазине обувь и ушли, полностью обутые. Сколько пар обуви купили сороконожки в магазине?
4. Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки совпадают?

5. После семи стирок кусок хозяйственного мыла уменьшился вдвое по длине, ширине и высоте. На сколько стирок его еще хватит?

Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год

6 класс

Решение

1. Два числа: 2970 и 6975.

2.

Бочка 12 ведер	Бочка 8 ведер	Бочка 5 ведер
12	–	–
4	8	–
4	3	5
9	3	–
9	–	3
1	8	3
1	6	5
6	6	–

3. Сороконожки купили 40 пар обуви.

4. 23 раза

5. Мыла хватит только на 1 стирку.

Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год
7 класс

1. Среди 12 монет имеется одна фальшивая. Найти ее четырьмя взвешиваниями на весах с двумя чашками без гирь, если неизвестно, легче она или тяжелее остальных.
2. Найти наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.
3. Найти все такие натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить нуль.
4. Анжелика и Вероника играют в такую игру: поочередно называют целые положительные числа, причем Анжелика называет число не большее 10, Вероника называет число, превышающее число, названное Анжеликой, но не более чем на 10, и т. д. Выигрывает тот, кто назовет число 100. Как должна играть Анжелика, чтобы заведомо выиграть?

5. Имеются кубики с ребром 1 и 2 сантиметра. Нужно наполнить коробку со сторонами 8, 5 и 3 сантиметра так, чтобы не осталось пустого места и было использовано наименьшее количество кубиков. Сколько потребуется кубиков?

Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год

7 класс

Решение

1. При первом взвешивании положим на чашки по 4 монеты. Если весы будут в равновесии, то двумя взвешиваниями из 4 оставшихся монет выделим фальшивую. Если же одна из чашек опустится, то обозначим монеты буквой «л» или «т» в зависимости от того, на «более легкой» или «более тяжелой» чашке они лежат. Вторым взвешиванием сравним вес «легкой» четверки монет с оставшейся четверкой. Если весы останутся в равновесии, то фальшивая монета – среди четверки «тяжелых», и ее выделим оставшимися двумя взвешиваниями. Если при втором взвешивании одна чашка опустится, то, значит, фальшивая монета – одна из четырех «легких».

2. 1023457896.

3. Пусть исходное число $10x + y$, где y – цифра единиц. Тогда по условию девятикратное число равно $100x + y$. Итак, $9(10x + y) = 100x + y$, откуда $10x = 8y$ или $5x = 4y$, то есть y делится на 5, но y – цифра, значит, $y = 5$ или $y = 0$. Если бы $y = 0$, то $x = 0$ и число было бы нулем, то есть число $10x + y$ не является натуральным; значит, $y = 5$, откуда $5x$ равно произведению 4 и 5 и $x = 4$. Итак, единственным искомым числом будет 45.

4. Анжелика заведомо выиграет, если назовет число 89. Так как Вероника затем назовет число, не меньшее 90 и не большее 99, поэтому Анжелика сможет затем назвать число 100. Отсюда следует, что к выигрышу Анжелику ведет такая последовательность чисел: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100, называемых им, независимо от того, какие числа будет называть Вероника.

5. Потребуется 64 кубика.

Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год
8 класс

1. В пруд пустили 30 щук, которые постепенно поедали друг друга. Щука считается сытой, если она съела трех щук. Каково наибольшее число щук, которые могут насытиться?
2. Пять участников олимпиады стали ее победителями, набрав по 15, 14 и 13 баллов и заняв соответственно первое, второе и третье места. Сколько участников завоевали каждое призовое место, если вместе они набрали 69 баллов?
3. Каково наибольшее число квартир в стоквартирном доме, у которых сумма цифр номера одинакова?
4. Что больше: а) 5^{300} или 3^{500}?

5. На футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Игры с ничейными результатами имелись у $\frac{1}{3}$ команд, а $\frac{3}{4}$ остальных команд имели поражения. Сколько результативных встреч было в турнире?

Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год
8 класс

Решения

1. Насытится 9 щук; если, например, 7 щук насытятся (съев каждая по 3 голодные щуки), то останутся еще 2 голодные, которые насытятся (съев каждая по 3 ранее насытившиеся щуки); итак, общее количество насытившихся щук равно 9. Покажем, что 9 – наибольшее количество насытившихся щук. Пусть k – число оставшихся щук, n – число насытившихся, тогда $3n$ – число проглоченных щук, поэтому (если каждая щука или насытится, или не съест ни одной щуки) $k + 3 \cdot n = 30$, значит, $k = 3m$ и $m + n = 10$. Так как заведомо останутся несъеденные щуки, то m больше или равно 1, значит, наибольшее значение $n = 9$.
2. Три участника заняли три первых места, значит, набрали 42 балла. Поэтому два других участника набрали 69 – 42 = 27 баллов, то есть один из них набрал 14, а другой – 13 баллов, и, таким образом, заняли второе и третье места.
3. Номера квартир в доме принимают значения от 1 до 100, значит, сумма цифр номера квартиры изменяется от 1 до 18; в каждом десятке номеров сумма цифр различна (ибо у номеров одинаковая цифра десятков, а цифра единиц меняется от 0 до 9), значит, одинаковые суммы могут иметь лишь номера квартир с разными цифрами десятков; поэтому наибольшее количество квартир с одинаковой суммой цифр номера получим, если в каждой десятке найдется одна из таких квартир. В последнем десятке сумма цифр не меньше 9 (так как номера 90, 91, 92 и т. д.), В первом десятке – не больше 9, значит, 9 – это та сумма цифр, которая встречается наибольшее число раз, а именно 10 раз (в квартирах с номерами 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90).

4. $5^{300} = 125^{100} < 243^{100} = 3^{500}$; $5^{300} < 3^{500}$

5. Без ничьих провели турнир $\frac{2}{3}$ от общего числа команд. Эти команды имели только победы и поражения. Из условия получаем, что поражения имели $\frac{3}{4}$ от этих двух третей, то есть $\frac{1}{2}$ команд. Следовательно, оставшиеся команды имели только победы. Но такая команда может быть в турнире только одна, а по условию их число составляет 1 – $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ от общего числа команд. Таким образом, в турнире участвовало 6 команд.

Ничейные результаты имели поэтому 2 команды, а это возможно только в случае, когда вничью они сыграли между собой. Следовательно, все матчи, кроме одного, были результативными. Поскольку в турнире из 6 участников проводится 15 партий, то результативными оказались 14.

О т в е т: 14.

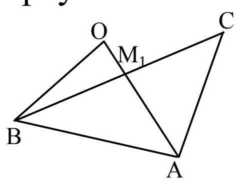
Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год
9 класс

1. Можно ли расставить по окружности 20 красных и несколько синих фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной красной фишке, стояла синяя и никакие две синие фишки не стояли рядом?
2. Можно ли число 1974 представить как разность квадратов двух натуральных чисел?

3. Четыре последовательных целых числа являются цифрами тысяч, сотен, десятков и единиц некоторого четырехзначного числа. На сколько увеличится это число, если его цифры написать в обратном порядке?

4. Какой цифрой оканчивается число $9999^{999^{99^{9}}}$?

5. В треугольнике ABC угол B равен 36°, а угол C равен 42°. На стороне BC взята точка M так, что BM = R, где R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Найти угол MAC.



Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год
9 класс

Решение

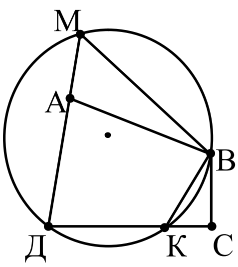
1. По условию красные и синие фишки должны чередоваться (на окружности), значит, всего их 40. На полуокружности между красной и противоположной ей синей фишкой стоят 19 фишек, значит, крайние из этих 19 фишек – одноцветны, а они должны быть разноцветными, как соседние – одна – с красной, другая – с синей. Следовательно, указанная в задаче расстановка фишек невозможна.
2. Нельзя; указание: 1974 делится на 2, но не делится на 4, в то время как если разность $a^2 - b^2$ четна, то четны и $a - b$ и $a + b$, следовательно, $a^2 - b^2$ делится на 4.
3. На 3087; пусть a, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$ – цифры четырехзначного числа, тогда исходное число $1000a + 100(a + 1) + 10(a + 2) + (a + 3)$; новое число $1000(a + 3) + 100(a + 2) + 10(a + 1) + a$, их разность: 3000 + 100 – 10 – 3 = 3087.
4. 9, так как 9 в нечетной степени оканчивается на 9.
5. O – центр описанной около Δ ABC окружности. M_1 – точка пересечения OA с BC. Докажем, что точка M_1 совпадает с точкой M. $\angle AOB = 84°$, $\angle OAB = 90° - 42° = 48°$, $\angle BM_1O = 36° + 48° = 84°$.

Следовательно, $BM_1 = BO = R$, то есть точка M_1 совпадает с точкой M. Искомый угол $\angle MAC = 54°$.

О т в е т: $\angle MAC = 54°$.

Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год
10 класс

1. Клиент банка забыл четырехзначный шифр своего сейфа и помнил лишь, что этот шифр – простое число, а произведение его цифр равно 243. За какое наименьшее число попыток он наверняка сможет открыть свой сейф?
2. По кругу написано 20 чисел, каждое из которых равно сумме двух своих соседей. Доказать, что сумма всех чисел равна 0.
3. В левом нижнем углу квадратной доски 7×7 стоит король. За один ход он может передвинуться либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку по диагонали – вправо и вверх. Сколькими различными путями может попасть король в правый верхний угол доски, если ему запрещается посещение центральной клетки?
4. В цехе работало несколько станков. После реконструкции количество станков сократилось, причем число процентов, на которое уменьшилось число станков, оказалось равным числу оставшихся станков. Какое наименьшее число станков могло быть в цехе до реконструкции?
5. Известны две стороны вписанного четырехугольника $ABCD$: $AB = a$, $BC = b$. На стороне CD взята точка K так, что $CK = m$. Окружность, проходящая через B, K и D, пересекает прямую DA в точке M, отличной от D. Найдите AM.



Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год
10 класс

Решения

1. Запишем для каждого числа равенство, в левой части которого стоит само это число, а справа – сумма двух его соседей. Сложим все эти равенства. В левой части получим сумму всех чисел (обозначим ее через S). В правой части каждое число будет встречаться дважды (как левый сосед и как правый сосед), и поэтому получится $2S$. Получим $S = 2S$, значит, $S = 0$.
2. Составим таблицу 7×7, в каждой клетке которой напишем число, равное количеству допустимых путей, которыми король может дойти до этой клетки из левого нижнего угла.

   Заполнять таблицу будем постепенно. Сначала левый столбец и нижнюю строку заполняем единицами. Кроме того, в центральной клетке ставим ноль (по условию задачи). Далее заполняем второй слева столбец и вторую снизу строку и так далее по следующему правилу: в очередной клетке ставим сумму чисел, стоящих в трех соседних клетках, – снизу, слева и по диагонали (снизу слева).

1	13	85	314	848	2078	5020
1	11	61	168	366	864	2078
1	9	41	66	132	366	848
1	7	25	0	66	168	314
1	5	13	25	41	61	85
1	3	5	7	9	11	13
1	1	1	1	1	1	1

   В результате получим таблицу, в верхнем правом углу которой стоит число, служащее ответом.

   О т в е т: 5020.
3. Обозначим первоначальное число станков через x, а число оставшихся станков через n. Условие задачи приводит к уравнению: $x \cdot \frac{100-n}{100} = n$, которое преобразуется к виду $x = \frac{10000}{100-n} - 100$.

Для того чтобы получить наименьшее значение x, число $100 - n$ надо выбрать наибольшим. Перебрав все делители числа 10000, меньшие 100, получим $100 - n = 80$, откуда $x = 25$.

О т в е т: 25 станков.

4. Треугольники AMB и CKB подобны. Это следует из равенства углов – $\angle DCB = \angle MAB$ во вписанном четырехугольнике $ABCD$ – и равенства углов $\angle BMD = \angle BKC$ во вписанном четырехугольнике $DMBK$ (каждый раз мы берем внутренний угол четырехугольника и внешний к противоположному углу).

   Из подобия получаем пропорцию $AM : AB = CK : CB$, откуда $AM = \dfrac{ma}{b}$.

   О т в е т: $\dfrac{ma}{b}$.

Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год
11 класс

1. На доске были записаны первые 20 натуральных чисел. Одно из них стерли, и оказалось, что среди 19 оставшихся чисел есть число, равное среднему арифметическому этих 19 чисел. Какое число стерли?
2. Можно ли в клетках квадратной таблицы $n \times n$ расставить числа 0, 1 или 2 таким образом, что суммы чисел по строкам и по столбцам принимали бы все различные значения от 1 до $2n$. Рассмотрите случай: n – нечетное число;
3. Укажите момент времени, когда впервые после полуночи угол между минутной и часовой стрелкой будет равным 1°, при том, что минутная стрелка показывает целое число минут.
4. Петя вскапывает грядку один на a минут дольше, чем это делает вместе с Васей. Вася вскапывает ту же грядку на b мин дольше, чем он это сделал бы вместе с Петей. За сколько минут вскапывают ту же грядку Вася и Петя вместе?
5. На стороне треугольника взяты четыре точки K, P, H и M, являющиеся соответственно серединой этой стороны, концом биссектрисы противоположного угла треугольника, точкой касания с этой стороной вписанной в треугольник окружности и основанием соответствующей высоты. Найти KH, если $KP = a$, $KM = b$

Школьная олимпиада по математике
2015-2016 уч. год
11 класс

Решения

1. Сумма чисел на доске, первоначально равная $1 + 2 + \ldots + 20 = 210$ и уменьшившаяся на стертое число, заключена в пределах от $210 - 20 = 190$ до $210 - 1 = 209$. Она, кроме того, кратна 19, поскольку в 19 раз больше одного из слагаемых. А так как из чисел 190, 191, 192,…, 209 только числа 190 и 209 кратны 19, то стерли либо число $20 = 210 - 190$, либо $1 = 210 - 209$. В обоих случаях среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, не совпадает со стертым числом.
   О т в е т: 20, 1.
2. Предположим, что нам удалось заполнить нужным образом таблицу $n \times n$, где n – нечетное число. Сложим суммы чисел во всех столбцах таблицы и суммы чисел во всех строках таблицы. Получим число S. С одной стороны, $S = 1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n + 1)$ – число нечетное.

С другой стороны, S равно удвоенной сумме всех чисел, стоящих в таблице (поскольку при сложении всех строк и столбцов каждое число считается дважды), значит, S обязано быть числом четным, то есть получили противоречие.

3. Пусть в x часов y минут угол между часовой и минутной стрелкой составляет $1°$. По условию y – натуральное (целое положительное) число (x – целое число по смыслу задачи). За x часов часовая стрелка повернется на угол $30x$ (в градусах), а за y минут – еще на $({}^{y}\!/_{2})°$ (за 1 минуту часовая стрелка повернется на $\frac{1}{2}^{\circ}$). Минутная стрелка за y минут повернется на $(6y)°$.

Поскольку минутная стрелка может «обогнать» часовую или, наоборот, отстать от нее на 1°, получаем уравнение:

$$\left|30x + \frac{y}{2} - 6y\right| = 1 \text{ или } 60x - 11y = \pm 2.$$

Требуется найти наименьшее значение x, удовлетворяющее этому уравнению. При $x = 1, 2, 3$ целых значений y, удовлетворяющих уравнению, нет, а при $x = 4$ получается $y = 22$.

О т в е т: 4 часа 22 минуты.

4. Обозначим через t мин искомое время ($t > 0$). Так как за 1 мин, работая вместе, ребята вскопают часть грядки, равную $\frac{1}{t+a} + \frac{1}{t+b}$, то $t = \frac{1}{\frac{1}{t+a}+\frac{1}{t+b}}$, или $t(2t + (a + b)) = t^2 + (a + b)t + ab$.

Значит, нужно найти положительный корень уравнения $t^2 = ab$.

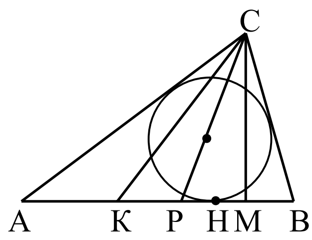
О т в е т: $t = \sqrt{ab}$.

5. Пусть дан Δ ACB, в котором $AB = x$, $BC = y$, $CA = z$.

CK – медиана,

CP – биссектриса,

CM – высота.



Имеем: $BK = \frac{x}{2}$; по свойству биссектрисы $\frac{BP}{CB} = \frac{AP}{AC}$, $BP \cdot AC = AP \cdot CB$, $BP \cdot AC = CB \cdot (AB - BP)$, $BP \cdot AC + CB \cdot BP = CB \cdot AB$,

$BP = \frac{CB \cdot AB}{AC + BC} = \frac{xy}{y+z}$;

$BH = \frac{x+y-z}{2}$ (вывод этой формулы основан на равенстве касательных, выходящих из одной точки); из прямоугольного треугольника MCB $BM = CB \cdot \cos \angle B = y \cdot \cos \angle B = \frac{2xy\cos\angle B}{2x} = \frac{x^2+y^2-z^2}{2x}$.

Далее находим:

$KP = BP - BK = \frac{x(y-z)}{2(y+z)}$,

$KH = BH - BK = \frac{y-z}{2}$,

$KM = BM - BK = \frac{y^2-z^2}{2x}$.

Легко проверить, что выполняется равенство $KH^2 = KP \cdot KM$. Таким образом, $KH = \sqrt{ab}$.

О т в е т: $\sqrt{ab}$.